北京师范大学广州实验学校 2020-2021 学年第一学期
12 月月考高一年级数学问卷

命题人：蔡迪　　　审题人：董杨

本试卷共 4 页 22 题；考试时间：120 分钟；满分：150

注意：本试卷包含单选题与不定项选择题，所有答案必须用 2B 铅笔涂在答题卡中相应的位置。所有答案必须填在答题卷的相应位置。答案写在试卷上均无效，不予记分。

一、选择题（本大题共 8 小题，共 40.0 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	A	B	A	A	C	A

1. 已知集合 $A=\{x|x\geqslant 0\}$，$B=\{0,1,2\}$，则（　）

A. $A\subsetneqq B$　　B. $B\subsetneqq A$　　C. $A\cup B=B$　　D. $A\cap B=\varnothing$

【答案】B

【解析】

【分析】

本题考查集合的包含关系判断及应用，解题的关键是正确理解子集的定义，及⊆，⫋的意义.

观察两个集合，A 中包含大于等于 0 的所有实数，而 B 中只有实数 0，1，2，由子集的定义易得答案

【解答】

解：由题意 A 中包含大于等于 0 的所有实数，而 B 中只有实数 0，1，2，

$\therefore B$ 中的元素都在 A 中，A 中的元素不一定在 B 中　　$\therefore B\subsetneq A$

故选 B.

2. “$x>3$ 且 $y>3$”是“$x+y>6$”成立的(　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 即不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】

本题主要考查充分条件和必要条件的判断，根据不等式的性质是解决本题的关键.

根据不等式的性质结合充分条件和必要条件的定义进行判断即可.

【解答】

解：当 $x>3$ 且 $y>3$ 时，$x+y>6$ 成立，即充分性成立，

若 $x=6$，$y=2$ 满足 $x+y>6$，但 $x>3$ 且 $y>3$ 不成立，即必要性不成立，

故“$x>3$ 且 $y>3$”是“$x+y>6$”成立的充分不必要条件.

故选 A.

3. 正实数 x,y 满足$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$，则 $x+2y$ 的(　　)

A. 最小值为$\frac{3}{2}+\sqrt{2}$　　B. 最大值为$\frac{3}{2}+\sqrt{2}$

C. 最小值为 $3+2\sqrt{2}$　　D. 最大值为 $3+2\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】

本题主要考查了基本不等式的运用，属于基础题.

使用基本不等式的结构形式〃积定或和定”，再利用基本不等式求最值即可.

【解答】

解：∵正实数 x、y 满足$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$，

$\therefore x+2y=\frac{1}{2}(x+2y)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})$

$=\frac{1}{2}(3+\frac{2y}{x}+\frac{x}{y})\geqslant\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$，

当且仅当$\frac{x}{y}=\frac{2y}{x}$，即 $x=\sqrt{2}y$ 时，等号成立，

所以 $x+2y$ 的最小值为$\frac{3}{2}+\sqrt{2}$，

故选 A.

4. 已知函数 $y=f(x)$在定义域$(-1,1)$上是减函数，且 $f(2a-1)<f(1-a)$，则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $(\frac{2}{3},+\infty)$　　B. $(\frac{2}{3},1)$　　C. $(0,2)$　　D. $(0,+\infty)$

【答案】B

【解析】

【分析】

本题考查了抽象函数的单调性，属于基础题.

利用函数 $y=f(x)$在定义域$(-1,1)$上是减函数，将 $f(2a-1)<f(1-a)$转化为：$2a-1>1-a$ 求解，注意定义域.

【解答】

解：函数 $y=f(x)$在定义域$(-1,1)$上是减函数，

且 $f(2a-1)<f(1-a)$，

则有：$\begin{cases}-1<2a-1<1\\-1<1-a<1\\2a-1>1-a\end{cases}$，

解得：$\frac{2}{3}<a<1$.

故选 B.

5. 若函数 $f(x)$的定义域为$[-1,4]$，则函数 $f(2x-1)$的定义域为( )

A. $[0,\frac{5}{2}]$　　B. $[-7,3]$　　C. $[-\frac{1}{2},2]$　　D. $[-1,4]$

【答案】A

【解析】

【分析】

本题考查抽象函数定义域的概念及求法，已知 $f(x)$定义域求 $f[g(x)]$定义域的方法．根据 $f(x)$的定义域即可得出 $f(2x-1)$需满足：$-1\le 2x-1\le 4$，解出 x 的范围即可.

【解答】

解：$\because f(x)$的定义域为$[-1,4]$，

$\therefore f(2x-1)$满足$-1\le 2x-1\le 4$，

解得 $0\le x\le\frac{5}{2}$，

$\therefore f(2x-1)$的定义域为$[0,\frac{5}{2}]$.

故选 A.

6. 若 $f(x)=\begin{cases}(3a-1)x+a,x<1\\-2ax,x\ge 1\end{cases}$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的减函数，则 a 的取值范围是(　　)

A. $[\frac{1}{6},\frac{1}{3})$　　B. $(\frac{1}{6},\frac{1}{3}]$　　C. $(0,\frac{1}{3})$　　D. $(-\infty,\frac{1}{3}]$

【答案】A

【解析】

【分析】

本题主要考查分段函数的单调性，属于基础题.

首先每段函数在定义域内为减函数，在$(-\infty,+\infty)$上的减函数，可得$\begin{cases}3a-1<0\\-2a<0\\-2a\leq 3a-1+a\end{cases}$，

可得选项.

【解答】

解：由题意可得$\begin{cases}3a-1<0\\-2a<0\\-2a\leq 3a-1+a\end{cases}$，解得$\frac{1}{6}\leq a<\frac{1}{3}$.

故选 A.

7. 下列结论中错误的是(　　)

A. $\sin 390^0=\frac{1}{2}$

B. 若α是第二象限角，则$\frac{\alpha}{2}$为第一象限或第三象限角

C. 若角α的终边过点 $P(3k,4k)(k\neq 0)$，则 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$

D. 若扇形的周长为 6，半径为 2，则其圆心角的大小为 1 弧度

【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查的是诱导公式、三角函数定义，象限角及弧度制有关的结论的判断，属于基础题.

根据有关知识依次判断即可得解.

【解答】

解：A． $\sin 390^\circ=\sin(360^\circ+30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$，故 A 正确；

B.因为α为第二象限角， $\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $\frac{\pi}{4}+k\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

当 k 为偶数时，$\frac{\alpha}{2}$为第一象限的角，当 k 为奇数时，$\frac{\alpha}{2}$为第三象限角，故 B 正确；

C.当 $k<0$ 时，$r=-5k$，此时 $sin\alpha=-\frac{4}{5}$，故 C 错误；

D.若扇形的周长为 6，半径为 2，则弧长为 2，

其圆心角的大小为$\frac{l}{r}=\frac{2}{2}=1$ 弧度，故正确.

故选 C.

8. 函数 $f(x)$的图象与函数 $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$的图象关于直线 $y=x$ 对称，则 $f(2x-x^2)$的单调递减区间为( )

A. $(0,1)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $(-\infty,1)$　　D. $(1,2)$

【答案】A

【解析】

【分析】

本题考查函数的对称性、对数函数和指数函数，考查函数的定义域和值域，函数的单调区间，属于中档题.

由已知函数 $f(x)$的图象与函数 $g(x)=(\frac{1}{2})^x$的图象关于直线 $y=x$ 对称，可得函数 $f(x)$，进而求出 $f(2x-x^2)$的解析式，求出函数 $f(2x-x^2)$的定义域后，分别讨论内外函数的单调性，结合复合函数单调性“同增异减”的原则可得答案.

【解答】

解：∵函数 $f(x)$的图象与函数 $g(x)=(\frac{1}{2})^x$的图象关于直线 $y=x$ 对称，

$\therefore f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$，

故 $f(2x-x^2)=\log_{\frac{1}{2}}(2x-x^2)$，

由 $2x-x^2>0$，得 $0<x<2$，

故函数 $f(2x-x^2)$的定义域为$(0,2)$，

外函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 为减函数，内函数 $y=2x-x^2$在区间$(0,1)$上为增函数，

故函数 $f(2x-x^2)$在区间$(0,1)$上单调递减.

故选 A.

二、不定项选择题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

题号	9	10	11	12
答案	ABD	ABD	CD	BC

9. 已知幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$的图象经过点$(2,4)$，则下列判断中正确的是( )

A. 函数图象经过点$(-1,1)$

B. 当$x\in[-1,2]$时，函数 $f(x)$的值域是$[0,4]$

C. 函数满足$f(x)+f(-x)=0$

D. 函数 $f(x)$的单调减区间为$(-\infty,0]$

【答案】ABD

【解析】

【分析】

本题考查幂函数的解析式、单调性和奇偶性，属于基础题.

根据幂函数过点$(2,4)$求出幂函数的解析式，再逐一分析即可.

【解答】

解：幂函数$f(x)=x^{\alpha}$的图象经过点$(2,4)$，

所以$2^{\alpha}=4$，解得$\alpha=2$，所以$f(x)=x^2$，

所以$f(-1)=1$，即函数图象经过点$(-1,1)$，故A正确；

当$x\in[-1,2]$时，$x^2\in[0,4]$，

函数$f(x)$的值域是$[0,4]$，B对，

易知$f(x)=f(-x)$，函数$f(x)=x^2$为偶函数，故C错误；

函数$f(x)$的单调减区间为$(-\infty,0]$，故D正确；

故选ABD.

10. 若$a<b<0$则下列结论中错误的有( )

A. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B. $0<\frac{a}{b}<1$　　C. $ab>b^2$　　D. $\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】

主要考查了不等式的基本性质，不等式的基本性质，难度适中.

利用不等式的性质逐项验证是否正确.

【解答】

解：A：由$a<b<0$，两边同乘以$\frac{1}{ab}$，则$\frac{1}{ab}\times a<\frac{1}{ab}\times b$，即$\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$，故$A$错误；

B：由$a<b<0$可知$\frac{a}{b}>0$，又$a-b<0$，$b<0$，则$\frac{a}{b}-1=\frac{a-b}{b}>0$，即$\frac{a}{b}>1$，故$B$错误；

C：由$a<b<0$即$a-b<0$，$b<0$，则$ab-b^2=b(a-b)>0$，故C正确；

D：由$a<b<0$即$|a|>|b|\Rightarrow a^2>b^2,\Rightarrow a^2-b^2>0$,且$ab>0$，则$\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=\frac{b^2-a^2}{ab}<0$，即$\frac{b}{a}<\frac{a}{b}$，故$D$错误.

故选ABD.

11. 下列四个命题：其中正确命题的是( )

A. 函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，在$(-\infty,0]$上单调递增，则 $f(x)$在 R 上是增函数

B. 集合 $A=\{x|ax^2-3x+2=0\}$至多有一个元素的充要条件是 $a\geq\frac{9}{8}$

C. 对任意实数 x 都有 $ax^2+ax+1>0$ 成立的充要条件是 $0\leq a<4$

D. 已知函数 $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$，则 $f(x)$的增区间为$(0,1)$

【答案】CD

【解析】

【分析】

本题考查函数的单调性，充分、必要条件的判断，元素个数问题和恒成立问题，属于一般题．

逐个判断即可．

【解答】

解：如 $f(x)=\begin{cases}x^2,x>0\\x+2,x\leq 0\end{cases}$，虽然函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，在$(-\infty,0]$上单调递增，

但不能说 $f(x)$在 R 上是增函数，故 A 错误；

当 $a=0$ 时，$x=\frac{2}{3}$，集合 A 中只有一个元素，故 B 错误；

因为对任意实数 x 都有 $ax^2+ax+1>0$ 成立，

当 $a=0$ 时，显然成立；

当 $a\neq 0$ 时，则$\begin{cases}a>0\\\Delta=a^2-4a<0\end{cases}$，即 $0<a<4$，

综上，$0\leqslant a<4$，

故对任意实数 x 都有 $ax^2+ax+1>0$ 成立的充要条件是 $0\leqslant a<4$，故 C 正确；

因为 $f(x)=\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{-(x-1)^2+1}(0\leqslant x\leqslant 2)$，

故 $f(x)$的增区间为$(0,1)$，故 D 正确．

故选 CD．

12. 下列说法正确的是(　)

A. 任意 $x\in R$，都有$3^x>2^x$

B. 函数 $f(x)=2^x-x^2$有三个零点

C. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$的最大值为 1

D. 函数 $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|-2}$为偶函数

【答案】BC

【解析】

【分析】

本题考查函数的性质及函数的零点，综合性强，难度适中.

由指数函数性质可判断 A；将问题转化为图像交点问题可判断 B；由复合函数的单调性可判断 C；先求定义域，化简后可判断 D.

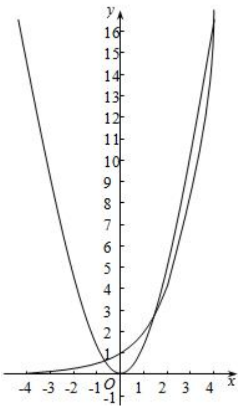
【解答】

解：对于 $A.x>0$ 时，有$3^x>2^x$，

$x=0$ 时，有$3^x=2^x$，

$x<0$ 时，有$3^x<2^x$，故 A 错误，

对于 B，画出函数 $y=2^x$，$y=x^2$的图象如下图，



可知 B 正确；

对于 C，$\because |x|\geqslant 0$，且函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^t$在 $[0,+\infty)$上单调递减，

$\therefore y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ 的最大值为 1，故 C 正确；

对于 D，$\because 1-x^2\geqslant 0$，即$-1\leqslant x\leqslant 1$，

$\therefore f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|-2}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+2-2}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$，自变量 x 的取值范围为$[-1,0)\cup(0,1]$，

$\because f(-x)=\frac{\sqrt{1-(-x)^2}}{-x}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=-f(x)$，

$\therefore f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|-2}$为奇函数，故 D 错误；

故答案为：BC.

三、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

13. 已知$\log_{\frac{1}{2}}x=3$，则$x^{\frac{1}{3}}=$____________.

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】本题考查了指数与指数幂的运算、对数与对数运算的相关知识，试题难度较易

【解答】

解：因为$\log_{\frac{1}{2}}x=3$，所以 $x=(\frac{1}{2})^3$，

所以$x^{\frac{1}{3}}=[(\frac{1}{2})^3]^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$.

14. 函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x-2}$的值域是___________

【答案】$(0,8]$.

【解析】

【分析】

本题考查了复合函数单调性和值域的求解；复合函数值域的求解方法通常用换元法，其中需要注意的是要准确求得新元的范围，解题中用到了整体思想，先令 $g(x)=x^2-2x-2$，再利用指数函数的单调性求解.

【解答】

解：令 $g(x)=x^2-2x-2$，则 $g(x)\geq-3$;

由二次函数性质得：函数 $g(x)=x^2-2x-2$ 在$(-\infty,1)$单调递减，在$(1,+\infty)$单调递增，

函数 $y=(\frac{1}{2})^x$为单调递减函数，

所以由复合函数单调性判断法则得：原函数的单调增区间是$(-\infty,1)$；

因为$x^2-2x-2\geqslant-3$，

所以原函数的值域为$(0,8]$.

故答案为$(0,8]$.

15. 已知方程$x^2+\mathrm{kx}+1=0(k>0)$有实根，则 $k+\frac{1}{k}$的最小值是 ______.

【答案】$\frac{5}{2}$

【解析】

【分析】

本题考查二次方程有实根问题，对勾函数在区间内的最值问题，属于基础题.

先根据一元二次方程有解得 $k\geqslant2$，再根据对勾函数 $y=k+\frac{1}{k}$的单调性求解即可.

【解答】

解：$\because$方程$x^2+kx+1=0(k>0)$有实根，　$\therefore k^2-4\geqslant0$，解得 $k\geqslant2$，

又 $y=k+\frac{1}{k}$在$[2,+\infty)$上单调递增， $\therefore k+\frac{1}{k}$的最小值是 $2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$,

故答案为$\frac{5}{2}$.

16. 若函数 $f(x)=(k-2)x^2+(k-1)x+3$ 是偶函数，则 $f(x)$的单调递减区间是__________.

【答案】$[0,+\infty)$

【解析】

【分析】

本题主要考查了偶函数的对称性的应用，及二次函数的单调区间的求解，属于基础题．令奇次项系数为 0 求出 k 的值，求出对称轴及开口方向，求出单调递减区间． 整式函数若为偶函数则不含奇次项，若为奇函数则不含偶次项；二次函数的单调区间与对称轴及开口方向有关．

【解答】

解：函数 $f(x)=(k-2)x^2+(k-1)x+3$ 是偶函数，

所以 $k-1=0$，解得 $k=1$，

所以 $f(x)=-x^2+3$， 此二次函数的对称轴为 $x=0$，开口向下，

所以 $f(x)$的递减区间是$[0,+\infty)$．

故答案为$[0,+\infty)$.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70.0 分）

17. （10）化简求值：

(1)$\sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^4}-(0.25)^{\frac{1}{2}}\times(\frac{1}{\sqrt{2}})^{-4}$；

(2)$\frac{1}{2}lg25+lg2-lg0.1$.

【答案】解：(1)原式$=2-\sqrt{3}-0.5\times4=2-\sqrt{3}-2=-\sqrt{3}$； ——————————5 分

(2)原式$=lg25^{\frac{1}{2}}+lg2-lg10^{-1}=\lg(25^{\frac{1}{2}}\times2\times10)=lg10^2=2\cdot$ ————————10 分

【解析】(1)利用指数运算性质即可得出；

(2)利用对数运算性质即可得出．

本题考查了指数与对数运算性质，考查了推理能力与计算能力，属于基础题．

18. （12 分）已知$\sin\theta$、$\cos\theta$是方程 $25x^2-5x+k=0$ 的两个实数根．

(1)求实数 k 的值；

(2)若θ是第二象限角，求$\tan\theta$ 的值．

【答案】解：(1) $\because sin\theta$、$cos\theta$是方程 $25x^2-5x+k=0$ 的两个实数根，

$\therefore \begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}\\ \sin\theta\cos\theta=\frac{k}{25}\end{cases}$，————————————————————————————3 分

$\because 1=\sin^2\theta+\cos^2\theta=(sin\theta+cos\theta)^2-2sin\theta cos\theta$，

$\therefore \frac{1}{25}-2\times\frac{k}{25}=1$，

$\therefore k=-12$；——————————————————————————————————6 分

(2)由(1)可得，$sin\theta cos\theta=-\frac{12}{25}$，$sin\theta+cos\theta=\frac{1}{5}$，

$\because \theta$是第二象限角，

$\therefore sin\theta>0$，$cos\theta<0$，————————————————————————————9 分

$\therefore sin\theta=\frac{4}{5}$，$cos\theta=-\frac{3}{5}$，

$\therefore tan\theta=\frac{sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{4}{3}$. ——————————————————————————12 分

【解析】本题主要考查韦达定理、同角三角函数的基本关系，属于基础题.

(1)利用韦达定理、同角三角函数的基本关系，可求 k，

(2)由(1)求得 $sin\theta$和 $cos\theta$的值，可得 $tan\theta$的值，进而求得 $tan\theta$.

19. （12 分）假设你有一笔资金用于投资，现有三种投资方案供你选择，这三种方案的回报如下：

方案 1：每天回报 500 元.

方案 2：第一天回报 100 元，以后每天比前一天多回报 100 元.

方案 3：第一天回报 10 元，以后每天比前一天翻一番.

(1)设第 x 天回报 y 元，就以上三种方案列出 y 关于 x 的函数解析式.

(2)当每天回报最高的方案是方案 1 时，求 x 的取值范围；当每天回报最高的方案是方案 2 时，求 x 的取值范围；当每天回报最高的方案是方案 3 时，求 x 的取值范围.

【答案】解：(1)依题意，方案 1：$y_1=500$，$(x\in N^*)$——————————2 分

方案 2：$y_2=100x$，$(x\in N^*)$——————————————————————————4 分

方案 3：$y_3=10\cdot 2^{x-1}(x\in N^*)$———————————————————————6 分

(2)由(1)知第 1 至第 4 天，方案 1 最多；——————————————————8 分

第 5 天，方案 1，方案 2 一样多；————————————————————————————10 分

第 6，第 7 天，方案 2 最多；

第 8 天开始，方案 3 最多．————————————————————————————————12 分

【解析】本题考查函数模型应用，属基础题．

(1)根据条件得方案 1：$y_1=500$，$(x\in\boldsymbol{N}^*)$方案 2：$y_2=100x$，$(x\in\boldsymbol{N}^*)$方案 3：$y_3=10\cdot 2^{x-1}(x\in\boldsymbol{N}^*)$；

(2)由(1)知知第 1 至第 4 天，方案 1 最多；第 5 天，方案 1，方案 2 一样多；第 6，第 7 天，方案 2 最多；第 8 天开始，方案 3 最多．

20. （12 分）已知函数 $f(x)=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$在区间$[\frac{1}{3},2]$上的最大值为 1．

(1)求 a 的值;

(2)当函数 $f(x)$在定义域内是增函数时，令 $g(x)=f(\frac{1}{2}+x)+f(\frac{1}{2}-x)$，判断函数 $g(x)$的奇偶性，并求出 $g(x)$的值域．

【答案】解：(1)当 $a>1$ 时，$f(x)$在区间$[\frac{1}{3},2]$上是增函数，所以 $f(2)=\log_a 2=1$，解得 $a=2$;——————————————————————————————————————2 分

当 $0<a<1$ 时，$f(x)$在区间$[\frac{1}{3},2]$上是减函数，所以 $f(\frac{1}{3})=\log_a\frac{1}{3}=1$，解得 $a=\frac{1}{3}$.

所以 $a=\frac{1}{3}$或 $a=2$．————————————————————————————————5 分

(2)当函数 $f(x)$在定义域内是增函数时，$f(x)=\log_2 x$.

则 $g(x)=f(\frac{1}{2}+x)+f(\frac{1}{2}-x)=\log_2(\frac{1}{2}+x)+\log_2(\frac{1}{2}-x)=\log_2(\frac{1}{4}-x^2)$，

由$\begin{cases}\frac{1}{2}+x>0\\ \frac{1}{2}-x>0\end{cases}$，得$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$,

所以函数 $g(x)$的定义域为$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.——————————————————————————8 分

因为 $g(-x)=g(x)$，

所以 $g(x)$是偶函数．

当 $0 \le x < \frac{1}{2}$时，$0 < \frac{1}{4} - x^2 \le \frac{1}{4}$,

又因为 $g(x) = \log_2(\frac{1}{4} - x^2)$在区间$[0,\frac{1}{2})$上是减函数，所以 $g(x)_{\max} = g(0) =- 2$，所以 $g(x)$在$[0,\frac{1}{2})$上的值域为$(-\infty,-2]$. ——————————————————————11 分

又 $g(x)$是偶函数，所以 $g(x)$在$(-\frac{1}{2},0]$上的值域也为$(-\infty,-2]$，

所以 $g(x)$的值域为$(-\infty,-2]$. ——————————————————————————12 分

【解析】本题考查函数性质的综合应用，属于中档题.

(1)当 $a > 1$ 时，$f(2) = \log_a 2 = 1$，解出 $a = 2$;当 $0 < a < 1$ 时，$f(\frac{1}{3}) = \log_a \frac{1}{3} = 1$，解出 $a = \frac{1}{3}$.

(2)由已知 $g(x) = \log_2(\frac{1}{4} - x^2)$，求出函数 $g(x)$的定义域为$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，又可证得 $g(x)$是偶函数，只需讨论当 $0 \le x < \frac{1}{2}$时函数的值域即可.

21. （12 分） 已知函数 $f(x) = 2^x (x \in R)$.

(1)解不等式 $f(x) - f(2x) > 16 - 9 \times 2^x$；

(2)若函数 $q(x) = f(x) - f(2x) - m$ 在$[-1,1]$上有零点，求 m 的取值范围；

【答案】 解：(1)设 $t = 2^x$，$t > 0$，

原不等式可化为 $t - t^2 > 16 - 9t$，

整理可得$t^2 - 10t + 16 < 0$，解得 $2 < t < 8$，———————————————————3 分

即 $2 < 2^x < 8$，解得 $1 < x < 3$，

所以不等式的解集为(1,3). ——————————————————————————————6 分

(2)设 $t = 2^x$，由 $x \in [-1,1]$可得 $t \in [\frac{1}{2},2]$，

则 $q(x) = f(x) - f(2x) - m = t - t^2 - m$，

令 $H(t) = t - t^2$，

由二次函数的知识可得，

当 $t = \frac{1}{2}$时，$H(t)_{max} = \frac{1}{4}$，当 $t = 2$ 时，$H(t)_{min} =- 2$，

故函数 $H(t)$的值域为$[-2,\frac{1}{4}]$，————————————————————————————10 分

函数 $q(x)$有零点等价于方程有解，等价于 m 在 $H(t)$的值域内，

故 m 的取值范围为$[-2,\frac{1}{4}]$.————————————————————————————12 分

【解析】本题考查函数的性质和恒成立问题以及不等式的解法的综合应用，属于较难题．

(1)设 $t=2^x$，原不等式可化为 $t-t^2>16-9t$，解一元二次不等式可得不等式的解集；

(2)设 $t=2^x$，可得 $t\in[\frac{1}{2},2]$，由二次函数的知识可得函数 $H(t)=t-t^2$的值域，可得 m 的取值范围；

22. （12 分）已知 $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$是定义在$(-1,1)$上的奇函数，且 $f(\frac{1}{2})=\frac{2}{5}$.

(1)求 $f(x)$的解析式；

(2)判断 $f(x)$的单调性，并证明你的结论；

(3)解不等式 $f(2t-2)+f(t)<0$．

【答案】解：(1)根据题意，$f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$是定义域在$(-1,1)$上的奇函数，

则有 $f(0)=0$，即 $f(0)=b=0$，

又由 $f(\frac{1}{2})=\frac{2}{5}$，则 $f(\frac{1}{2})=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{1}{4}+1}=\frac{2}{5}$，解可得 $a=1$，

则 $f(x)$的解析式为 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$；————————————————————————3 分

(2)当 $x\in(-1,1)$时，函数 $f(x)$为增函数，

证明如下：设$-1<x_1<x_2<1$，

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{x_1^2+1}-\frac{x_2}{x_2^2+1}=-\frac{(x_1x_2-1)(x_1-x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$,

又由$-1<x_1<x_2<1$，则$(x_1-x_2)<0$，$(x_1x_2-1)<0$；

则有 $f(x_1)-f(x_2)>0$，

即 $f(x_1)>f(x_2)$，

即函数 $f(x)$为增函数；——————————————————————————————7 分

(3)根据题意，$f(2t-2)+f(t)<0$，且 $f(x)$为奇函数

则有 $f(2t-2)<f(-t)$

∵当 $x\in(-1,1)$时，函数 $f(x)$单调递增，

则有$\begin{cases}-1<2t-2<1\\-1<t<1\\2t-2<-t\end{cases}$，解可得$\frac{1}{2}<t<\frac{2}{3}$；

则 t 的取值范围为$(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$.——————————————————————————————12 分

【解析】(1)根据题意，由奇函数的性质可得 $f(0)=b=0$，又由 $f(\frac{1}{2})=\frac{2}{5}$，则可得 $f(\frac{1}{2})=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{1}{4}+1}=\frac{2}{5}$，解可得 $a=1$，代入函数的解析式即可得答案；

(2)设 $-1<x_1<x_2<1$，由作差法分析 $f(x_1)$与 $f(x_2)$的大小关系，结合函数单调性的定义，即可得结论；

(3)利用函数的奇偶性以及单调性，可以将 $f(2t-2)+f(t)<0$ 转化为

$\begin{cases} -1<2t-2<1 \\ -1<t<1 \\ 2t-2<-t \end{cases}$，解可得 t 的取值范围，即可得答案.

本题考查函数的奇偶性、单调性及其应用，考查抽象不等式的求解，考查转化思想，考查学生灵活运用所学知识分析解决问题的能力.